271. 奇數次單葉冪級數ノ切斷ノ單葉半徑ニ就イテ, II

城　憲　三（阪大工）

第 261 号論文デ私ハ次ノ定理ヲ証明シマシタ。

定理 1.

(1)　$\varphi(z) = z + a_3 z^3 + \cdots\cdots + a_{2n+1} z^{2n+1} + \cdots\cdots$

ヲ $|z|<1$ デ正則單葉トシ，スベテノ係数 a_{2n+1} $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ハ實數デアルトスル、コノトキハスベテノ切断

$$s_n(z) \equiv z + a_3 z^3 + \cdots\cdots + a_{2n+1} z^{2n+1} \quad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

ハ $|z|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ デ單葉デアル。

本論文ニ於イテハ、更ニ定理 1 ノ係数ガ實數ナリト云フ條件ヲ除去シテ次ノ定理ノ眞ナルコトヲ示シテ見マス。

定理 2.　$\varphi(z) = z + a_3 z^3 + \cdots\cdots + a_{2n+1} z^{2n+1} + \cdots\cdots$ ガ $|z|<1$ デ正則單葉デアルナラバ，スベテノ切断 $s_n(z)$ ハ $|z|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ デ單葉デアル。

コノタメニ豫備定理トシテ能代氏ノ定理ヲ用ヒルト樂ニ計算ガ進ム様デス、コノ豫備定理ヲ從來ノ豫備定理ト合ハセ用ヒテ，最初三ツノ切断

$$s_1(z) \equiv z + a_3 z^3,$$

$$s_2(z) \equiv z + a_3 z^3 + a_5 z^5,$$

$$s_3(z) \equiv z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + a_7 z^7$$

ハ先ヅ $|z|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ デ單葉ナルコトガ分リ，後ハ前ト同方法デ計

算シマス。(コノタメニ第261号論文ニ於テモ幾分簡単化サレル様ニナリマシタ)

定理2ヲ証明スル方針ニ基キ，豫備定理ノ一ツトシテ能代——尾崎氏ノ定理ヲ加ヘ更ニ拡張サレタル定理トシテk-級ノ単葉冪級数

$$\varphi_k(z)=z+a_1^{(k)}z^{k+1}+a_2^{(k)}z^{2k+1}+\cdots\cdots+a_\nu^{(k)}z^{\nu k+1}+\cdots\cdots$$

$$(k=1,2,\cdots\cdots)$$

ノ切断ノ性質ニマデ進展出來ル様ニ思ハレマス。

§1. 定理2ハ次ノ豫備定理ヲ必要トシマス。

豫備定理1.

$|z_1|,|z_2|<1$ ナルトキハ

$$(2)\qquad \left|\frac{\varphi(z_1)-\varphi(z_2)}{z_1-z_2}\right|\geqq\left(\frac{1-|z_1|^2}{1+|z_1|^2}\right)^2\cdot\frac{|1-\bar{z}_1z_2|}{\left(|z_1-z_2|+|1-\bar{z}_1z_2|\right)^2}$$

証明ハ第261号論文ニアリマス。

豫備定理2.

$$(3)\qquad \begin{cases}|a_{2n+1}|<2^{\frac14}3^{\frac12}e^{\frac12}=3,39\cdots\cdots<3,4=\frac{17}{5}\ (n=1,2,\cdots\cdots).\\ 特ニ\ |a_{11}|<1,8^{*)}\end{cases}$$

*) J.E. Littlewood 及ビ R.E.A.C. Paley ハ $a_{2n+1}=O(1)$ ナルコトヲ発見シテ我々ヲ驚カセタノハマダ極最近デアルが，今又 V. Levin ハ $\underset{0\leqq n<\infty}{\text{upper bound}}|a_{2n+1}|=A<2^{\frac14}3^{\frac12}e^{\frac12}$ ナル結果ヲ得タノデアル(Levin, Proceedings of the London Mathematical Society, 39,(1935). p. 467–480). Levin ノ結果ハ Landau ニ負フトコロ大ナルモノがアルト筆者ハ想像スル。

コノ前ノ論文デ係数評価ノタメ Grandjot ノ方法ヲ用ヒル様ニ述べタが今ハソノ必要がナクナッタ。$|a_{11}|<1,8$ ナル結果ハ Levin ノ上記論文ニアル結果 $|a_{11}|<1,70$ ヨリ悪イケレドモ私ノ計算ニヨレバ $|a_{11}|<1,70$ トハナラナイ。

豫備定理3.

$|\kappa(\tau)|=1$ ナル函數 $\kappa(\tau)$ 存在シ

$$(4)\quad \begin{cases} a_3=-\displaystyle\int_0^\infty \kappa(\tau)e^{-\tau}d\tau, \\ a_5=\dfrac{3}{2}\left[\displaystyle\int_0^\infty \kappa(\tau)e^{-\tau}d\tau\right]^2-\displaystyle\int_0^\infty \kappa^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau \end{cases}$$

トオケコトが出來ル。　コノ證明ハ K, Löwner, "Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, I," Math. Annalen, 89 (1923), 103-121 ニアリマス。

豫備定理4.

$$f(z)=z+\cdots\cdots$$

ガ $|z|<R$ デ regular デ且ツ $\mathcal{R}(f'(z))>0$ ナラバ $f(z)$ ハ $|z|<R$ デ單葉デアル。

コノ證明ハ K. Noshiro, "On the theory of Schlicht Functions," (北大ノ Journal) ニアリマス。

§2. $s_1(z)$, $s_2(z)$, $s_3(z)$ ノ $|z|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ デ單葉ナル證明(豫備定理3, 4ヲ用ヒル)

I. $z+a_3z^3$ ノ $|z|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ デ單葉ナルコトハ性質 $|a_3|\leqq 1$ ヨリ明ラカ。

II. $z+a_3z^3+a_5z^5$ ノ $|z|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ デ單葉ナルコトハ，コノ前ヨリモ簡單ニ次ノ様ニ云ヘバヨイ。

$\mathcal{R}\, s_2'(z)\equiv\mathcal{R}(1+3a_3z^2+5a_5z^4)$ ノ $|z|=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ニ於ケル Min.

ハ $z=\frac{1}{\sqrt{3}}$ デ起ルト考ヘテ一般性ヲ失ハナイ。何者，モシ然ラズシテ Min. ガ $z=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\theta}$ デ起ルナラバ $\varphi(z)$ ノ代リニ $e^{-i\theta}\cdot\varphi(e^{i\theta}z)=z+a_3e^{i2\theta}z^3+a_5e^{i4\theta}z^5+\cdots\cdots$ ヲ考ヘタラ

$$\mathcal{R}\, s_2'(z)=\mathcal{R}(1+3a_3e^{i2\theta}z^2+5a_5e^{i4\theta}z^4)$$

トナリ、コノ Min. ハ $z=\frac{1}{\sqrt{3}}$ デ起ルコトヽナルカラデアル。

従ツテ

$$\mathcal{R}\left(1+a_3+\frac{5a_5}{9}\right)>0 \quad 即チ\ \mathcal{R}(-9a_3-5a_5)<9$$

ナルコトヲ云ヘバヨイ。

(5) $a_3=x_1+iy_1, \quad a_5=x_2+iy_2$

トオキ

$$-9x_1-5x_2<9$$

ナルコトヲ示セバヨイノデアルガ、之レハ既ニ第261号論文デ述ベタ。

III. $\mathcal{R}(1+3a_3z^2+5a_5z^4+7a_7z^6)>0$ ノ証明モ同様デアル。

左辺ノ Min. ハ $z=\frac{1}{\sqrt{3}}$ デ起ルトスル。

$$s_3'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=1+a_3+\frac{5a_5}{9}+\frac{7a_7}{27}$$

ダカラ

$$\mathcal{R}\left\{-\frac{27}{7}-\frac{27}{7}a_3-\frac{15}{7}a_5\right\}<\mathcal{R}\,a_7$$

ナルコトヲ示セバヨイ。(4), (5) ヲ用ヒ，

$$K(\tau)\equiv x(\tau)+iy(\tau)$$

トオキ

$$\mathcal{R}\left\{-\frac{27}{7}-\frac{27}{7}a_3-\frac{15}{7}a_5\right\}$$

$$=-\frac{27}{7}-\frac{27}{7}x_1-\frac{15}{7}\mathcal{R}\left\{\frac{3}{2}\left[\int_0^\infty \kappa(\tau)e^{-\tau}d\tau\right]^2-\int_0^\infty \kappa^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau\right\}$$

$$=-\frac{27}{7}-\frac{27}{7}x_1-\frac{45}{14}(x_1^2-y_1^2)+\frac{15}{7}\int_0^\infty \left(x^2(\tau)-y^2(\tau)\right)e^{-2\tau}d\tau$$

$$=-\frac{27}{7}-\frac{27}{7}x_1-\frac{45}{14}x_1^2+\frac{45}{14}\left(\int_0^\infty y(\tau)e^{-\tau}d\tau\right)^2+\frac{15}{7}\int_0^\infty \left(1-2y^2(\tau)\right)e^{-2\tau}d\tau$$

$-\frac{27}{7}x_1-\frac{45}{14}x_1^2\leqq\frac{81}{280}$ デアルカラ

$$\leqq-\frac{27}{7}+\frac{81}{280}+\frac{15}{14}+\frac{45}{14}\left(\int_0^\infty y(\tau)e^{-\tau}d\tau\right)^2-\frac{30}{7}\int_0^\infty y^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau$$

$$=-\frac{699}{280}+\frac{15}{7}\left\{\frac{3}{2}\left(\int_0^\infty y(\tau)e^{-\tau}d\tau\right)^2-2\int_0^\infty y^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau\right\}$$

Schwarz-Cauchy ノ不等式ニヨッテ

$$\left(\int_0^\infty y(\tau)e^{-\tau}d\tau\right)^2\leqq\int_0^\infty y^2(\tau)e^{-\tau}d\tau\int_0^\infty e^{-\tau}d\tau=\int_0^\infty y^2(\tau)e^{-\tau}d\tau$$

デアルカラ

$$\leqq-\frac{699}{280}+\frac{15}{7}\int_0^\infty y^2(\tau)\left\{\frac{3}{2}e^{-\tau}-2e^{-2\tau}\right\}d\tau$$

$$=-\frac{699}{280}+\frac{15}{7}\int_0^1 y^2(-\log x)\left\{\frac{3}{2}-2x\right\}dx$$

$$=-\frac{699}{280}+\frac{15}{7}\int_0^{\frac{3}{4}} y^2(-\log x)\cdot\left(\frac{3}{2}-2x\right)dx+\frac{15}{7}\int_{\frac{3}{4}}^1 y^2(-\log x)\left(\frac{3}{2}-2x\right)dx$$

$|y^2(-\log x)| = |y^2(\tau)| \leqq 1$ デアルカラ

$$< -\frac{699}{280} + \frac{15}{7}\int_0^{\frac{3}{4}} \left(\frac{3}{2} - 2x\right) dx$$

$$= -\frac{699}{280} + \frac{15}{7}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}$$

$$= -\frac{723}{560} < -1{,}25 < \Re\, a_7 \quad (|a_7| < 1{,}25^{**})$$

以上デ $s_3(z) \equiv z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + a_7 z^7$ ノ $|z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ デ單葉ナルコトが分ッタ。

§3. $s_n(z) \equiv z + a_3 z^3 + \cdots\cdots + a_{2n+1} z^{2n+1}$ $(n \geqq 4)$ ノ $|z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ デ單葉ナル証明（予備定理 1, 2 ヲ用ヒル）コノ前ノ方法ト大同小異デアル。

$|z_1| = |z_2| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ トシテ，$z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$，$z_2 = \frac{x}{\sqrt{3}}$ $(|x| = 1)$ トシテヨイ。コノトキハ (2) ヨリ

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}\right| \geqq \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left|1 - \frac{x}{3}\right| + \frac{2}{\sqrt{3}}|1 - x| + \frac{1}{3}\left|\frac{(1-x)^2}{1 - \frac{x}{3}}\right|}, \tag{6}$$

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{2\nu+1}\frac{z_1^{2\nu+1} - z_2^{2\nu+1}}{z_1 - z_2}\right| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{|a_{2\nu+1}|}{3^{\nu}}\left|\frac{1 - x^{2\nu+1}}{1 - x}\right| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{|a_{2\nu+1}|}{3^{\nu}}(2\nu+1) \tag{7}$$

**) 計算ノ結果 $|a_7| < 1{,}249\cdots\cdots$ ヲ得ル，(Levin ノ上記論文参照)。又 Grandjot ノ方法デ本論文ニ関係ハナイが $|a_9| < 1{,}38$ ナルコトハ示サレル（第261号論文参照）。Levin ノ方法デハ $|a_9| < 1{,}38$ トハナラナイヤウニ思ヒマス。前ノ 261 号論文デ不等式 $|a_9| < 1{,}38$ ヲ用ヒマシタが予備定理 4 ヲ用フレバ之ハ不要トナリ Dieudonné ノ定理 $|a_{2n+1}| + |a_{2n-1}| \leqq 2$ ダケデ進行出来マス。

トナルが，場合ヲ二ツニ分ケテ $n\geqq 4$ ニ對シ

$$(8)\qquad \left|\frac{g(z_1)-g(z_2)}{z_1-z_2}\right| > \left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{2\nu+1}\frac{z_1^{2\nu+1}-z_2^{2\nu+1}}{z_1-z_2}\right|$$

ナルコトヲ示サウ。我々ハ (8) ノ成立スルコトヲ示セバヨイ。

a) $|1-x|\leqq 0{,}38$ ナル場合

コノトキハ (8) ヲ證明スルタメニ (7) ヨリ $n\geqq 4$ ニ對シ

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{2\nu+1}\frac{z_1^{2\nu+1}-z_2^{2\nu+1}}{z_1-z_2}\right| \leqq \sum_{\nu=5}^{\infty}\frac{|a_{2\nu+1}|}{3^{\nu}}(2\nu+1)$$

$$< \frac{|a_{11}|}{3^5}\cdot 11+\frac{17}{5}\sum_{\nu=6}^{\infty}\frac{2\nu+1}{3^{\nu}}$$

$$< \frac{1{,}8\cdot 11}{3^5}+\frac{17}{5}\cdot\frac{13\cdot\frac{1}{3^6}-11\cdot\frac{1}{3^7}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{218}{1215} < 0{,}18.$$

他方ニ於テ (6) ヨリ

$$\left|1-\frac{x}{3}\right| \leqq \frac{2+|1-x|}{3} \leqq \frac{2{,}38}{3}, \quad \frac{1}{3}\left|\frac{(1-x)^2}{1-\frac{x}{3}}\right| \leqq \frac{1}{3}\cdot\frac{0{,}1444}{1-\frac{1}{3}} = \frac{0{,}1444}{2}$$

デアルカラ

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left|1-\frac{x}{3}\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}|1-x|+\frac{1}{3}\left|\frac{(1-x)^2}{1-\frac{x}{3}}\right|} \geqq \frac{3}{2(4{,}76+4\sqrt{3}\cdot 0{,}38+0{,}4332)}$$

$$> \frac{3}{15{,}6548} > 0{,}19\cdots\cdots > 0{,}18$$

即チ (8) ハ成立スル。

b) $|1-x|>0{,}38$ ナル場合

(7) ヨリ $n \geqq 4$ ニ對シ

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{2\nu+1}\frac{z_1^{2\nu+1}-z_2^{2\nu+1}}{z_1-z_2}\right| \leqq \sum_{\nu=5}^{\infty}\frac{|a_{2\nu+1}|}{3^{\nu}}\left|\frac{1-x^{2\nu+1}}{1-x}\right|$$

$$\leqq \frac{2}{|1-x|}\cdot\sum_{\nu=5}^{\infty}\frac{|a_{2\nu+1}|}{3^{\nu}}.$$

而シテ

$$\sum_{\nu=5}^{\infty}\frac{|a_{2\nu+1}|}{3^{\nu}} < \frac{1{,}8}{3^5}+\frac{17}{5}\sum_{\nu=6}^{\infty}\frac{1}{3^{\nu}} = \frac{1{,}8}{3^5}+\frac{17}{10\cdot 3^5} = \frac{35}{10\cdot 3^5} < 0{,}015.$$

故ニ

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{2\nu+1}\frac{z_1^{2\nu+1}-z_2^{2\nu+1}}{z_1-z_2}\right| < \frac{2}{|1-x|}\cdot 0{,}015$$

(8) ヲ証明スルニハ

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left|1-\frac{x}{3}\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}|1-x|+\frac{1}{3}\left|\frac{(1-x)^2}{1-\frac{x}{3}}\right|} > \frac{2}{|1-x|}\cdot 0{,}015$$

即チ

$$(9)\qquad \left|\frac{1-\frac{x}{3}}{1-x}\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\left|\frac{1-x}{1-\frac{x}{3}}\right| < \frac{1}{8\cdot 0{,}015} = 8{,}3\cdots\cdots$$

ナルコトヲ示セバヨイノデアルガ $\left|\frac{1-\frac{x}{3}}{1-x}\right|$ ハ $\arg x$ ノ減少函数デ且ツ $\left|1-\frac{x}{3}\right|<1$ デアルカラ

$$\left|\frac{1-\frac{x}{3}}{1-x}\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\left|\frac{1-x}{1-\frac{x}{3}}\right| < \frac{1}{0{,}38}+\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1+\frac{1}{3}}$$

$$< 2{,}6+1{,}2+0{,}5 = 4{,}3$$

ヲ得テ (9) ハ成立スル。

依ツテ定理2ヲ証明スルコトが出来タ。

(注意) 定理1ハ予備定理1, 3, 4ノミデ証明が出来ルが，定理2ハ更ニ予備定理2ヲ必要トシテヰルコトハ面白イト思ヒマス。 定理2が拡張出来マシタラ又述べサセテ頂キタイト思ヒマス。

一般ノ羃級数ノ切断ノ研究ニハ東京，仙台，京都，名古屋等ノ方々ノ花々シイ御研究がアリ、随分雑誌ヲ賑ハサレマシタコトハマダ記憶ニ新シイ。ソレ等ノ研究ハ主トシテ零点ニ着目セラレタ、Riemann 面ニ着目シテ又新シイ研究が発展建設セラレ，函数論ノ一部門ヲナスト云フコトハ望マレヌコトデアラウカ。